



# Les structures fines de l'électromagnétisme classique et de la relativité restreinte (The fine structures of Classical Electromagnetism and Special Relativity)

Yves Pierseaux, Germain Rousseaux

## ► To cite this version:

Yves Pierseaux, Germain Rousseaux. Les structures fines de l'électromagnétisme classique et de la relativité restreinte (The fine structures of Classical Electromagnetism and Special Relativity). 2006. hal-00016282

**HAL Id: hal-00016282**

**<https://hal.science/hal-00016282>**

Preprint submitted on 4 Jan 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Les structures fines de l'électromagnétisme classique et de la relativité restreinte

Yves Pierseaux et Germain Rousseaux  
ULB ypiersea@ulb.ac.be

January 5, 2006

## Abstract

L'un d'entre nous (Y. P.) a montré l'existence d'une composante longitudinale dans la propagation des ondes lumineuses sur la base de la cinématique sous-jacente à l'ellipse de Poincaré. Nous montrons comment ce constat s'accorde avec la théorie électromagnétique. Nous rappelons que l'autre d'entre nous soutient l'existence d'une "structure fine" de l'électromagnétisme à savoir la coexistence de deux théories, l'une fondée sur les champs (Heaviside-Hertz) et l'autre sur les potentiels (Riemann-Lorenz). L'existence de deux cinématiques différentes ("structure fine" de la relativité restreinte: Poincaré ou Einstein) correspond à ces deux formulations de l'électromagnétisme classique.

Dans ce but, nous prouvons l'invariance relativiste de la décomposition de Helmholtz du potentiel vecteur. Celle-ci se traduit par une compensation généralisée à toutes les directions de propagation, sur la base de la tangente à l'ellipse de Poincaré, entre le potentiel scalaire et la composante longitudinale du potentiel vecteur. L'adoption par Poincaré de la condition de jauge de Lorenz (avec une composante longitudinale et temporelle) est en contraste avec le photon einsteinien avec uniquement des composantes transversales compatible avec le choix de la condition de jauge de Coulomb "complétée"(jauge transverse).

## Introduction

L'un d'entre nous a montré que l'image par la transformation de Lorentz (TL) d'un front d'onde plane (à deux dimensions spatiales: une droite d'onde normale à la direction de propagation) était la tangente à l'ellipse de Poincaré. Dès lors, si l'image poincaréenne d'un front d'onde transversal n'est pas un front d'onde transversal [Pierseaux Y.(ellipse)], cela *semble* en contradiction avec la théorie électromagnétique pour laquelle le caractère transversal des ondes électromagnétiques planes ne fait aucun doute. Or, comme l'ellipse avec sa tangente est entièrement déduite de la TL, nous allons montrer que la différence entre les deux points de vue, Einstein ou Poincaré, ("la structure fine"

[Pierseaux Y. (Ph.D, ULB)] ne se manifeste pas au niveau des champs électromagnétiques mais au niveau des potentiels électromagnétiques. Ceux qui sont par principe sceptiques quant à l'existence d'une structure fine pourraient ainsi être rassurés puisque selon le point de vue de orthodoxe les potentiels ne ne sont pas des êtres physiques. N'oublions cependant pas que, si du point de vue pré-relativiste le choix de jauge est considéré comme arbitraire, le point de vue relativiste imposerait au contraire une jauge bien déterminée qui devrait être covariante par la TL. Il convient donc d'y regarder de plus près.

Nous allons préciser en quoi la structure fine de la relativité restreinte est reliée à ce que l'on pourrait nommer la structure fine de l'électromagnétisme classique. En effet, il tout à fait possible de formuler l'électromagnétisme classique uniquement en termes des potentiels électromagnétiques d'après les travaux de Riemann et Lorenz en opposition avec la formulation orthodoxe de Heaviside et de Hertz exprimée uniquement en termes de champs électromagnétiques. Nous allons démontrer la parfaite compatibilité entre la formulation de Riemann-Lorenz et la cinématique de Poincaré.

## 1 La "structure fine" de l'électromagnétisme classique

La vision moderne de l'électromagnétisme classique est issue des travaux de H. Hertz et O. Heaviside qui prennent pour point de départ de la théorie, les champs électrique et magnétique qui sont solutions des équations dites "de Maxwell" où interviennent les densités de charge et de courant. Résoudre un problème d'électromagnétisme revient donc à trouver les champs en fonctions des sources. Cependant, en pratique, il est commode dans cette perspective d'introduire des quantités mathématiques secondaires appelées potentiels qui sont définis de manière indirecte en fonction des champs qui sont les quantités primaires observables. H.A. Lorentz souligna que, de part cette définition indirecte, les potentiels sont indéterminés suivant ce que l'on appelle une "transformations de jauge" qui laisse invariante les champs. Afin de lever cette indétermination, il apparaît que l'on doit introduire dans les calculs en fonction des potentiels une relation mathématique supplémentaire qui fixe la valeur de ces potentiels: on choisit une "jauge" grâce à une "condition de jauge". Historiquement, trois conditions de jauge étaient connues à l'époque des travaux de Poincaré et d'Einstein [Jackson J. & Okun L. ] à savoir principalement, la condition de jauge dite "de Coulomb" (en fait due à Maxwell :  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ) et celle dite "de Lorentz" (en fait due à Kirchoff, Riemann, Lorenz, Lorentz et Fitzgerald de manière indépendante :  $\nabla \cdot \mathbf{A} + 1/c_L^2 \partial_t V = 0$  ; nous l'attribuons dans la suite à L.V. Lorenz car il fût le premier à exprimer clairement que c'était la "condition" de la propagation à célérité finie). On introduit aussi la jauge dite "transverse" ou "de rayonnement" qui consiste à postuler la condition de jauge de Coulomb et à annuler simultanément le potentiel scalaire ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  et  $V = 0$ ).

La lecture des oeuvres de Maxwell pour un lecteur moderne est une source

d'étonnement [Darrigol O. (1)]. En effet, contrairement à la vision actuelle sur le sujet, Maxwell considère les potentiels comme des grandeurs physiques à part entière : en particulier, le potentiel vecteur est pour lui la "quantité fondamentale" de l'électromagnétisme classique. Comment peut-on passer d'une vision où les potentiels semblent jouer un rôle prépondérant à une vision où ils ne sont que des artifices mathématiques ? Il y a là un fil d'Ariane qu'il nous faut suivre [O'Rahilly A.]. Nous allons montrer que la position adoptée par J.C. Maxwell était intermédiaire entre celle de Riemann-Lorenz et celle qu'adoptera Heaviside et Hertz. Cette dernière sera adaptée par H.A. Lorentz pour aboutir à la vision dominante actuelle où les potentiels ne sont pas exclus mais n'admettent pas d'interprétation physique.

Avec la découverte par Hertz des ondes électromagnétiques, il s'est posé la question de caractériser l'orientation des champs électrique et magnétique afin de tester une prédiction essentielle de Maxwell à savoir que la lumière consistait en une vibration électromagnétique transverse à la direction de propagation d'une onde plane [Smirnov-Rueda R.]. Or, Fitzgerald fit remarquer qu'un dipôle électrique tel qu'utilisé par Hertz rayonne certes des ondes électromagnétiques mais que celles-ci ne sont qu'approximativement planes et transverses seulement loin de la source dans ce que l'on appelle désormais la zone de rayonnement [Fitzgerald G. F.]. Proche de celui-ci, l'influence du dipôle se résume à l'interaction Coulombienne obtenue par le calcul en statique : la propagation est instantanée. Hertz lui-même a mis en évidence expérimentalement l'existence de cette zone où la lumière semble se propager quasi-instantanément : en particulier, loin de la source, on montre que la phase de l'onde hertzienne est décalée d'un facteur  $\pi$  par rapport à une onde qui se serait propagée idéalement depuis cette même source à célérité finie comme si la zone proche n'existait pas [Smirnov-Rueda R.]. De plus, on met aussi en évidence expérimentalement une zone dite intermédiaire où le rayonnement dipolaire électrique est tel qu'il existe une composante radiale du champ électrique non-nulle qui se propage à vitesse finie. Fitzgerald souligna justement que seule, la condition de jauge de Lorenz, pouvait décrire cette composante radiale dépendante du temps qui s'annulerait dans la jauge "transverse" (condition que Maxwell avait utilisée pour décrire la propagation lumineuse; sinon ce dernier utilisait la condition de jauge de Coulomb lorsqu'il n'y avait pas d'ondes)<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Selon Fitzgerald [Fitzgerald G. F.]: « In most investigations on the propagation of light attention has been concentrated on the transverse nature of the vibration. Longitudinal motions have been relegated to the case of pressural waves, and investigators have devoted themselves to separating the two as much as possible... the existence of a longitudinal component is mention only to show that it is very small and the motion is mostly transverse. Now, the longitudinal component is no doubt generally small except in the the immediate neighbourhood of a source; but it by no means follows that, as a consequence, the actual direction of motion is transverse at all points in a wave. In every complicated wave there are points and often lines along which the transverse component vanishes, and at all these places the small longitudinal component may be, and often is, of great relative importance, so that the actual motion is largely in the direction of wave propagation at these places. The simplest case is that of a simple oscillator whose theory has been completely worked out by Hertz...If the electric oscillator is parallel to z, we have for the components of the vector potential :  $A_x = 0$   $A_y = 0$   $A_z = A_0 \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}$  and the components of the electric force, which

Peu après les travaux du physicien G.F. Fitzgerald et indépendamment, le mathématicien T. Levi-Civita publia un article dans lequel il se donnait pour but selon ses termes de "réduire" la théorie de Helmholtz à celle de Hertz [Levi-Civita T.(1) ]. En fait la théorie de Helmholtz dont parle Levi-Civita consiste en la théorie de Riemann-Lorenz<sup>2</sup>, à savoir que les potentiels sont solutions d'une équation de D'Alembert avec un terme source proportionnel à la densité de charge ou de courant :

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (2)$$

La théorie de Helmholtz est une variante de la théorie de Riemann-Lorenz en ce sens qu'elle prévoit contrairement à la théorie de Maxwell l'existence d'ondes longitudinales de potentiel vecteur mais qui se propagent à une vitesse différente des ondes transverses de potentiel vecteur de manière analogue à la propagation des ondes élastiques [Smirnov-Rueda R.]. Cependant, le potentiel scalaire se propage de manière instantanée chez Helmholtz comme chez Maxwell. Dans la théorie de Riemann-Lorenz, il existe une propagation longitudinale des potentiels scalaire et vecteur à la même célérité (de la lumière) que celle des ondes transverses en potentiel vecteur [Rousseaux G. (1)]. Levi-Civita fût le premier à démontrer mathématiquement que les équations de propagation pour les potentiels auxquelles on ajoute la conservation de la charge ( $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho = 0$ ) permettent de retrouver l'équation de Lorenz ( $\nabla \cdot \mathbf{A} + 1/c_L^2 \partial_t V = 0$ ) ainsi que les équations de Heaviside-Hertz en termes des champs [Levi-Civita T.(1) ] & [T. Levi-Civita (2)] :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

---

are in general :  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{dJ}{dx} - \nabla^2 A_x$   $\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{dJ}{dy} - \nabla^2 A_y$   $\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{dJ}{dz} - \nabla^2 A_z$  where :  
 $J = \frac{dA_x}{dx} + \frac{dA_y}{dy} + \frac{dA_z}{dz}$  become in this case :  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}$   $\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y}$   
 $\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}$ .

It is particularly to be observed that  $\partial_t E_x$  and  $\partial_t E_y$  arise entirely from  $J$ , which was dismissed by Maxwell as not coming into consideration in cases of wave propagation on account of there being no varying electrification. This is true as regards *propagation*, but not all as regards origination. In all cases of origination we have to do with conduction, or its equivalent convection, and in most such cases we have changing electrification which brings in the  $J$  term.»

<sup>2</sup>A la fin du XIXème siècle, la théorie de Maxwell n'est pas universellement adoptée et plusieurs autres théories sont en compétition. H. Poincaré fit un remarquable recensement des théories existantes dans son livre "Electricité et Optique" [Poincaré H. ]. Il distinguait la théorie de Maxwell, la théorie de Helmholtz, la théorie de Hertz et la théorie de Lorentz.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c_L^2} \partial_t \mathbf{E} \quad (4)$$

On peut aussi postuler l'équation de Lorenz et retrouver l'équation de conservation de la charge. Donc, la théorie de Riemann-Lorenz est mathématiquement plus fondamentale que celle de Heaviside-Hertz qui en découle [O'Rahilly A.]. Quant à Lorenz, il postulait la formulation de Heaviside-Hertz, introduisait les potentiels à partir des champs  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  et  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla V$  et constatait qu'ils étaient indéterminés selon les transformations de jauge [Darrigol O. (1)].

A ce niveau de notre enquête historique, il est essentiel de se poser la question suivante : la formulation de Riemann-Lorenz pourrait-elle être une alternative à celle de Lorenz ? En effet, si l'on fait l'hypothèse que les potentiels sont des quantités primaires dont dérivent les champs en tant que quantités secondaires alors il faut pouvoir définir les potentiels de manière indépendante des champs et expliquer pourquoi la condition de jauge de Lorenz est une nécessité (une contrainte) et pas un choix commode pour les calculs. De plus, que devient la condition de jauge de Coulomb (ou transverse) puisque la formulation de Riemann-Lorenz sélectionne d'emblée celle de Lorenz alors que la formulation de Lorenz les met sur un pied d'égalité en tant que "fixatrices de jauge"? Pourquoi la formulation de Lorenz a-t-elle été adoptée plutôt que celle de Riemann-Lorenz ?

L'ensemble de ces questions cristallise ce que nous appellerons désormais la "structure fine" de l'électromagnétisme classique.

Quelle signification physique peut-on attribuer à l'équation de Lorenz qui semble jouer un rôle prépondérant dans la formulation de Riemann-Lorenz ? Tout d'abord, on peut remarquer qu'elle a la forme d'une équation de continuité : divergence d'un flux plus dérivée temporelle d'une densité égale à zéro. Par ailleurs, Riemann a fait remarqué, il y a bien longtemps, la ressemblance entre cette équation et l'équation de continuité d'un fluide ( $\rho \nabla \cdot \mathbf{u} + D\rho/Dt = 0$ ). Rousseaux [Rousseaux G. (1)] a récemment précisé la pensée de Riemann en montrant que l'équation de continuité hydrodynamique pouvait s'écrire sous une forme strictement analogue à l'équation de Lorenz en considérant des ondes acoustiques ( $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} + 1/c_S^2 \partial_t (\delta p / \rho_0) = 0$ ). En hydrodynamique, la propagation de la perturbation de vitesse est indissociable de celle de la perturbation de pression : soit l'écoulement est incompressible et il n'y a pas d'ondes acoustiques, soit l'écoulement est compressible et il y a à la fois des ondes de pression et de vitesse. Par analogie avec la mécanique des fluides, si les potentiels se propagent selon une équation de Riemann alors ils doivent obéir à une équation de continuité électromagnétique à savoir la "contrainte de Lorenz" ainsi que nous la désignerons désormais.

Quelles significations physiques peut-on attribuer aux potentiels ? Maxwell appelait le potentiel vecteur soit l'intensité électrotonique, soit la quantité de mouvement électrocinétique, soit la quantité de mouvement électromagnétique. Clairement, il l'identifiait à une impulsion généralisée au sens de la Mécanique Analytique de Lagrange [Darrigol O. (1)].

En effet, selon Maxwell :

« The conception of such a quantity, on the changes of which, and not on its absolute magnitude, the induction currents depends, occurred to Faraday at an early stage of his researches. He observed that the secondary circuit, when at rest in an electromagnetic field which remains of constant intensity, does not show any electrical effect, whereas, if the same state of the field had been suddenly produced, there would have been a current. Again, if the primary circuit is removed from the field, or the magnetic forces abolished, there is a current of the opposite kind. He therefore recognised in the secondary circuit, when in the electromagnetic field, a “peculiar electrical condition of matter’ to which he gave the name of Electrotonic State.»

Selon William Whewell (un des professeurs de Maxwell), l'état électro-tonique de Faraday se traduit par l'existence d'une quantité de mouvement dans le milieu. La résistance du milieu à la formation d'un courant est analogue à l'inertie qui s'oppose à la mise en mouvement d'un objet matériel:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Leftrightarrow \text{Capacité à produire un courant} = \text{variation temporelle de l'état électro-tonique}$$

$$\text{Inductance d'un circuit} \Leftrightarrow \text{Inertie d'une masse}$$

Maxwell identifie le potentiel vecteur moderne comme étant l'intensité électro-tonique et dont la dérivée temporelle, en l'occurrence le champ électrique, produit une force électro-motrice :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

La loi empirique de Lenz (1834) sur l'induction explique le signe négatif. Selon Maxwell [Darrigol O. (1)] :

« The Electrokinetic momentum at a point represents in direction and magnitude the time-integral of the electromotive intensity which a particle placed at this point would experience if the currents were suddenly stopped. Let  $A_x, A_y, A_z$  represent the components of the electromagnetic momentum at any point of the field, due to any system of magnets or currents. Then  $A_x$  is the total impulse of the electromotive force in the direction of  $x$  that would be generated by the removal of these magnets or currents from the field, that is, if  $E_x$  be the electromotive force at any instant during the removal of the system :  $A_x = \int E_x dt$ . Hence the part of the electromotive force which depends on the motion of magnets or currents in the field, or their alteration of intensity, is :  $E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t}$ ...If there is no motion or change of strength of currents or magnets in the field, the electromotive force is entirely due to variation of electric potential, and we shall have :  $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$  ...»

Le potentiel vecteur est une impulsion électromagnétique c.à.d. une variation de quantité de mouvement électromagnétique selon la définition mécanique d'une impulsion. Or, il est nécessaire de se donner un référentiel pour définir une impulsion mécanique ce qui se traduit par l'existence d'une constante de référence pour le potentiel vecteur. D'une manière moderne, on peut donc donner la définition suivante : le potentiel vecteur en un point M est l'impulsion qu'un opérateur extérieur doit fournir mécaniquement à une charge unité pour l'amener de l'infini, où par convention celui-ci est nul, jusqu'au point M.

Concernant le potentiel scalaire, il suffit de remplacer le mot impulsion par énergie dans la définition précédente en se rappelant que d'après Maxwell : « Potential, in electrical science, has the same relation to Electricity that Pressure, in Hydrostatics, has to Fluid Electricity and Fluids all tend to pass from one place to another if the Potential, Pressure is greater in the first place than in the second. »

Pourquoi Maxwell n'a-t-il pas proposé la théorie de Riemann-Lorenz alors qu'il connaissait leur travaux ? La réponse se trouve dans une note écrite par Maxwell sur la théorie électromagnétique de la lumière [Darrigol O. (1)] :

« From the assumption of both these papers we may draw the conclusions, first, that action and reaction are not always equal and opposite, and second, that apparatus may be constructed to generate any amount of work from its own resources. For let two oppositely electrified bodies A and B travel along the line joining them with equal velocities in the direction AB, then if either the potential or the attraction of the bodies at a given time is that due to their position at some former time (as these authors suppose), B, the foremost body, will attract A forwards more than B attracts A backwards. Now let A and B be kept asunder by a rigid rod. The combined system, if set in motion in the direction AB, will pull in that direction with a force which may either continually augment the velocity, or may be used as an inexhaustible source of energy. »

En clair, Maxwell a rejeté les conséquences "relativistes" de la théorie de Riemann-Lorenz en ce sens que la troisième loi de Newton n'est plus valide en relativité restreinte car elle présuppose la simultanéité absolue de l'action et de la réaction ce qui est incompatible avec le principe de relativité comme l'a démontré Henri Poincaré ([Darrigol O.(2)] & [Granek G.]): deux événements étant observés dans un référentiel qui semblent simultanés, ne sont plus simultanés étant observés dans un autre référentiel. En effet, on peut lire par exemple dans Science et Méthode :

"Voyons ce que devient, dans la théorie de Lorentz, le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Voilà un électron A qui entre en mouvement pour une cause quelconque?; il produit une perturbation dans l'éther?; au bout d'un certain temps, cette perturbation atteint



un autre électron B, qui sera dérangé de sa position d'équilibre. Dans ces conditions, il ne peut y avoir égalité entre l'action et la réaction, au moins si l'on ne considère pas l'éther, mais seulement les électrons qui sont seuls observables, puisque notre Nature est formée d'électrons. En effet, c'est l'électron A qui a dérangé l'électron B?; alors même que l'électron B réagirait sur A, cette réaction pourrait être égale à l'action, mais elle ne saurait, en aucun cas, être simultanée, puisque l'électron B ne pourrait entrer en mouvement qu'après un certain temps, nécessaire pour la propagation."

Maintenant, la théorie proposée par Maxwell reposait sur son utilisation exclusive de l'équation de Coulomb (ou la jauge transverse pour les ondes) qui imposait une propagation instantanée du potentiel scalaire qui, de notre point de vue, avait deux avantages absolument cruciaux pour Maxwell : le premier était que cette propagation instantanée garantissait la simultanéité absolue et donc la validité de la loi de Coulomb ainsi que la troisième loi de Newton ; le second était que le potentiel vecteur (donc les champs) était transverse pour une onde électromagnétique plane en accord avec la théorie optique de la lumière qui avait démontré le caractère transverse de la lumière grâce aux expériences de polarisation de Fresnel.

Le premier avantage a été rejeté par Poincaré comme nous l'avons rappelé plus haut. Nous insistons particulièrement sur la filiation entre l'expérience de pensée de Maxwell à propos du principe de réaction et les raisonnements ultérieurs de Poincaré qui poussèrent ce dernier à adopter la formulation de Riemann-Lorenz où le potentiel scalaire se propage à vitesse finie en contradiction avec la troisième loi de Newton. Par ailleurs, le deuxième article de Levi-Civita fût publié en français dans les annales de la faculté des sciences de Toulouse en 1902 après la parution de la seconde édition d'Electricité et Optique en 1901 que Poincaré n'aurait pas manqué de recenser. De plus, H.A. Lorentz cita dès 1903 le premier article en italien de Lévi-Civita dans une publication en anglais [Lorentz H.A. ]. Il est très probable que Poincaré ait eu vent des travaux de Lévi-Civita soit directement soit indirectement via Lorentz après 1902. Ainsi, il n'est pas étonnant de constater que Poincaré ait adopté la formulation de Riemann-Lorenz dans son article de 1906 sur la dynamique de l'électron. Celle-ci joua un très grand rôle car il pût démontrer l'existence d'un quadri-vecteur potentiel ainsi que la covariance de la contrainte de Lorenz à partir de celle de la conservation de la charge en ayant postulé les transformations de l'espace et du temps qu'il attribua à Lorentz en utilisant l'invariance de la charge totale. En juillet 1912, quelques jours avant sa mort, Poincaré exprimera de manière indiscutable son adoption de la réduction de Levi-Civita [Poincaré H. (1912)]:

"Les équations de la seconde colonne (la formulation de Heaviside-Hertz : note des auteurs) étant des conséquences de celles de la première (la formulation de Riemann-Lorenz : note des auteurs)"

Le second avantage a été rejeté par l'un des auteurs (G.R.) en montrant que

l'utilisation de l'équation de Coulomb était confinée à la limite galiléenne dite « magnétique » de l'électromagnétisme classique due à Lévy-Leblond & Le Bellac [Rousseaux G. (1)] & [De Montigny M. & Rousseaux G.] et ne pouvait donc pas décrire la propagation de la lumière car elle est l'approximation de la contrainte de Lorenz qui est covariante selon les transformations de Poincaré-Lorentz et dont on prend la limite. Cette dernière devient covariante galiléenne dans la limite dite « électrique ».

## 2 La "structure fine" de la relativité restreinte

Contrairement à Poincaré, Einstein n'évoque jamais les potentiels dans ses articles sur la relativité. Il semble donc difficile d'admettre que ces derniers jouent un rôle quelconque (et donc a fortiori un rôle essentiel dans la cinématique einsteinienne). Cependant, l'un d'entre nous (Y.P.) a montré que [Pierseaux Y.(ellipse)], si la définition de la propagation longitudinale de l'onde plane ne posait aucun problème, la généralisation à toute direction de propagation posait par contre un problème sérieux (exactement comme la composition de deux vitesses dans des directions différentes dans la précession de Thomas). Nous avons ainsi montré que la définition einsteinienne de l'onde plane imposait la transversalité de l'onde par rapport à la direction de propagation dans les deux systèmes K et K' (objet et image). Le front image einsteinien, obtenu par la TL d'un front perpendiculaire à la direction de propagation dans K, selon ses propres termes, est *aussi* perpendiculaire à la direction de propagation dans K' ( $\varphi$  étant l'angle dans le système de la source):

En appelant  $\varphi'$  l'angle formé par **la normale de l'onde** (direction radiale) dans le système en mouvement et la "direction du mouvement"...<sup>3</sup> [Einstein A.1905, paragraphe 7]

Nous avons montré (à deux dimensions spatiales et en plaçant une source à l'infini au repos dans K) que l'image par la TL du front plan (une droite d'onde) dans K' était la tangente à l'ellipse allongée de Poincaré [Poincaré H. (1908)] qui ne forme évidemment pas un angle droit avec la direction de propagation dans K'. L'interprétation physique de la tangente à l'ellipse est immédiate: un ensemble d'événements simultanés dans K ne correspond pas, par la TL, à un ensemble d'événements simultanés dans K'. La *double transversalité* einsteinienne (ou la double simultanéité einsteinienne) consiste alors à annuler la composante longitudinale d'un vecteur **d'** situé sur cette tangente [Pierseaux Y.(ellipse)]. Rappelons que ce vecteur **d'** est l'image par la TL d'un vecteur **d** transverse à la direction de propagation (avec **k** pour vecteur d'onde) dans le système de la source K. Nous avons également montré que la composante transversale de ce vecteur **d'** était invariante:  $d = d_{\perp} = d'_{\perp}$

<sup>3</sup>En fait dans le texte original, Einstein s'est trompé et a écrit à la place de "la direction du mouvement", "la ligne observateur-source". Il a corrigé sur son exemplaire personnel (voir Balibar, Einstein, Oeuvres choisies, Relativités I, page 49 note 56).

Toutefois cette "double" transversalité peut a priori se rapporter aux champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{E}'$  ou au potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}'$ .

## 2.1 La cinématique d'Einstein et la condition de jauge "transverse" (Coulomb complétée)

Montrons maintenant que l'écriture einsteinienne de l'onde plane ( $\theta \neq \theta' \neq 0$ ) implique non seulement la double transversalité au niveau des champs *mais aussi et surtout* au niveau du **potentiel vecteur** [Pierseaux Y.(ellipse)]. Il y a deux possibilités: ou bien le vecteur mathématique  $\mathbf{d}$  sur le front d'onde objet représente soit le vecteur champ électrique  $\mathbf{E}$  ou le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , soit le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .

En se basant sur les TL du champ électromagnétique écrites par Einstein aux §6 et 8, on obtient la transformation relativiste de la composante transversale du champ électrique [Einstein A.1905]:

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5)$$

Il n'est pas restrictif de travailler à deux dimensions spatiales et donc on ne tient pas compte du champ magnétique.

D'après les §6 et 8 de l'article d'Einstein, on a

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\perp}$$

Le mode de transformation relativiste n'étant pas le même pour les composantes transversales des deux vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{A}$  puisque

$$\mathbf{A}'_{\perp} = \mathbf{A}_{\perp}$$

nous disposons d'un critère mathématique de choix. Il est tout à fait clair que selon ce critère ( $d_{\text{mathématique}} = A_{\text{physique}}$ ), on a:

$$A = A' = A'_{\perp} = A_{\perp} \quad \text{avec} \quad A'_{\parallel} = A_{\parallel} = 0 \quad (6)$$

C'est bien le POTENTIEL VECTEUR  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}'$ ) qui doit être placé sur chaque tangente aux cercles einsteiniens (cf. **Figure 1**). Bien entendu le champ électrique  $\mathbf{E}$  l'est aussi, mais l'écriture einsteinienne de l'onde plane [Pierseaux Y.(ellipse)] impose  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{k}' = 0$ .

Nous découvrons ainsi que le paragraphe 7 (phase de l'onde plane et formule Doppler) de l'article d'Einstein de 1905 va bien au delà des paragraphes 6 et 8 dans lesquels Einstein montre la covariance des équations de Maxwell, respectivement sans source ( $\rho = 0$ ) et avec source [Einstein A.1905]. Dans ces deux derniers paragraphes, Einstein s'en tient strictement à la transformation relativiste du champ électromagnétique. Le choix implicite du potentiel pour l'onde plane dans le paragraphe 7 ne change strictement rien au niveau des champs. Mais par contre il est d'une importance cruciale pour la cinématique

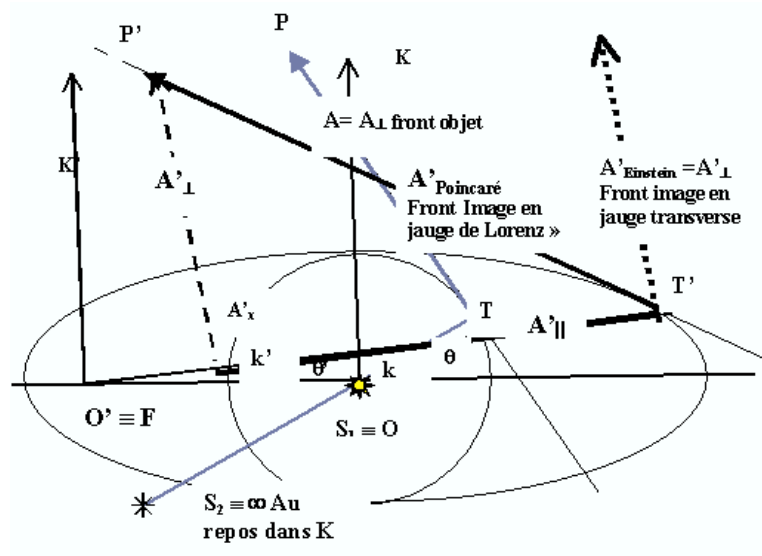


Figure 1: Le vecteur  $TP$  du front objet se transforme par la TL en le vecteur  $T'P'$  sur le front image. La composante longitudinale  $A'_{\parallel}$  du potentiel vecteur apparaît sur  $k'$ . Elle est annulée par Einstein.

einsteinienne car *physiquement* c'est bien le mode de détermination du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  qui règle le problème de la simultanéité (et non pas du champ électrique  $\mathbf{E}$ ). Nous insistons une nouvelle fois sur le fait qu'Einstein n'a jamais mentionné les potentiels dans ces écrits. Cependant, la traduction *en termes des potentiels électromagnétiques* de l'écriture par Einstein des ondes planes impose une condition de jauge compatible avec la double transversalité et la double simultanéité.

Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  conserve sa norme  $A$  qui est un invariant implicite de la cinématique einsteinienne:

$$A' = A \quad (7)$$

Et en vertu même de l'invariance de la norme du quadrivecteur (du genre spatial) potentiel, on a:

$$V^2 - A^2 = V'^2 - A'^2 \quad (8)$$

et donc nécessairement:

$$V = V' = 0 \quad (9)$$

On voit ainsi que la représentation einsteinienne ne revient pas seulement à ignorer l'ellipse (et sa tangente) mais bien plutôt à "l'annuler" (puisque'elle engendre une composante longitudinale non-nulle : cf. **Figure 1**). Il est clair que cela correspond implicitement à la **jauge "transverse"** (ou Coulomb complétée) :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' = 0 \quad (10)$$

à savoir la condition de jauge de Coulomb accompagnée de "l'annulation du potentiel scalaire  $V = V' = 0$  pour les ondes".

Les caractéristiques en jauge "transverse" de la grandeur physique vecteur potentiel ( $A'_{\parallel} = 0$ ) sont bien celles que l'on attendait: la jauge "transverse" est directement reliée à la question de la simultanéité absolue (propagation instantanée du potentiel scalaire). Nous avons vu que Maxwell lui-même avait conservé la jauge de Coulomb pour le potentiel scalaire (Laplacien) car une propagation non-instantanée de l'interaction coulombienne (D'Alembertien) lui paraissait impossible physiquement (violation flagrante du principe dynamique newtonien de réaction qui suppose la simultanéité absolue). Notre analyse montre que la traduction en termes des potentiels de la démarche einsteinienne revient à adopter la position de Maxwell sur ce point en ajoutant l'annulation du "potentiel des ondes" pour définir ses fronts d'onde purement spatiaux dans les deux systèmes.

Remarquons que dans ce dernier cas de figure, la jauge de Lorenz écrite comme une condition longitudinale grâce à la décomposition de Helmholtz (voir § 2.2) est trivialement vérifiée par annulation *radicale* de toutes les grandeurs qui s'y trouvent:

$$V = V' = 0 \quad A_{\parallel} = A'_{\parallel} = 0 \quad (11)$$

Un quadrivecteur amputé de la 1ère et de la 4ème composante n'est cependant plus un quadrivecteur. La jauge de Coulomb était donc bien cachée puisqu'elle était "tapie" au coeur même de la cinématique einsteinienne. On comprend dès lors pourquoi le front image plan einsteinien viole la relativité de la simultanéité puisqu'il est fondé sur le choix d'une jauge réputée... non-relativiste.

Si on annule la grandeur qui se propage instantanément, plus rien ne semble se propager instantanément. Il est évident que ce choix implicite sur les potentiels ne concerne pas que les ondes planes. Il ne saurait être question de "saucissonner" la cinématique einsteinienne (en "tranches coulombiennes" et "tranches non-coulombiennes"). Les fronts plans einsteiniens sont tangents aux fronts sphériques einsteiniens. Ces derniers sont inséparables de la convention einsteinienne de synchronisation et des tiges rigides einsteiniennes (et de sa définition de la contraction). C'est bien donc toute la cinématique d'Einstein qui est induite par un choix de jauge, celle de la jauge transverse.

## 2.2 La cinématique de Poincaré et la condition de jauge de Lorenz

Afin d'établir définitivement l'existence d'une structure fine de la relativité restreinte, nous devons maintenant prouver que la cinématique poincaréenne est parfaitement compatible avec la transversalité des ondes électromagnétiques au niveau des champs et qu'elle est fondée sur le choix de la condition de jauge de Lorenz. L'enjeu est évidemment crucial puisque la formule Doppler

[Pierseaux Y.(ellipse)] dépendrait alors d'un choix de jauge, ce qui est non-orthodoxe. On peut toujours poser dans le système objet  $\mathbf{A}_{\parallel} = V = 0$  mais nous devons montrer qu'avec une transformation conforme à la jauge (relativiste) de Lorenz, on obtient  $\mathbf{A}_{\parallel} \neq V \neq 0$  sans introduire une composante longitudinale  $E_{\parallel}$  au niveau des champs (ici champ électrique), ce qui invaliderait bien entendu la cinématique induite de l'ellipse.

Introduisons maintenant la décomposition de Helmholtz. Elle correspond au fait d'écrire n'importe quel vecteur comme la somme d'un gradient à rotationnel nul et d'un vecteur solénoïdal.

Effectuons maintenant une décomposition du potentiel vecteur pour une onde électromagnétique plane [Rousseaux G. (1)] :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp} = \nabla g + \nabla \times \mathbf{R} \quad (12)$$

ou  $g$  est un scalaire et  $\mathbf{R}$  un vecteur.

Comme  $\nabla \cdot \mathbf{A}_{\perp} = 0$  la condition de Lorenz ne met en jeu que la partie longitudinale de  $\mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{\parallel} + \frac{1}{c^2} \partial_t V = 0 \quad (13)$$

Au contraire, il est facile de voir que les champs s'expriment seulement en fonction de  $\mathbf{A}_{\perp}$  sous la forme

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}_{\perp} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{\perp}$$

Pour  $\mathbf{B}$ , cela résulte simplement de  $\nabla \times \mathbf{A}_{\parallel} = 0$ . Pour  $\mathbf{E}$  c'est une conséquence de la contrainte de Lorenz (par transformée de Fourier on a  $V_L = c_L A_x$ ). Il est alors facile de voir que le terme en  $-\partial_t A$  du champ électrique est compensé par le gradient du potentiel scalaire  $-\text{grad}V$ .

La décomposition de Helmholtz permet de "longitudinaliser" la jauge de Lorenz qui devient ainsi une condition sur la composante longitudinale du potentiel vecteur et le potentiel scalaire. La transversalité des ondes électromagnétiques au niveau des champs électromagnétiques n'impose pas la jauge de Coulomb. En effet, dans l'expression du champ électrique longitudinal, les deux termes se compensent avec [Rousseaux G. (1)] :

$$V = c A_x \quad (14)$$

Dans le raisonnement ci-dessus, il s'agit clairement d'une propagation longitudinale où  $A_x = A_{\parallel}$ . Or la décomposition de Helmholtz est définie sur la direction de propagation du front indépendamment de la direction du mouvement de l'observateur. On doit donc pouvoir obtenir une compensation quel que soit l'angle  $\theta$  entre la propagation (de l'onde) et le mouvement (de K' par rapport à K). Autrement dit que se passe-t-il si  $A_x$  ne correspond pas à une composante longitudinale? Ecrivons la TL à deux dimensions spatiales sous la forme suivante ([Poincaré H. (1905)],  $c = 1$ ), les deux sources considérées étant

au repos dans le système K (le front plan objet est dans K et le front plan image est dans K': cf. **Figure 1**):

$$x' = \gamma(x + \beta t) \quad y' = y \quad t' = \gamma(t + \beta x) \quad (15)$$

Projetons respectivement  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}'$  sur le système d'axe perpendiculaire Oxy dans K et sur Ox'y' dans K' et sur le système d'axes perpendiculaires formé par la direction de propagation  $\mathbf{k}$  dans K ( $\mathbf{k}'$  dans K') et la perpendiculaire à cette direction:

$$\begin{aligned} A'^2 &= A_x'^2 + A_y'^2 = \gamma^2 A_x^2 + A_y^2 \\ A_x' &= \gamma A_x \quad A_y' = A_y \end{aligned} \quad (16)$$

Il est très aisé de construire un quadrivecteur [Pierseaux Y.(ellipse)] dont les composantes se transforment comme (16). Il suffit d'annuler la quatrième composante du quadrivecteur dans K (ce qu'on peut toujours faire avec un 4-vecteur du genre espace)

$$(A_x, \quad A_y, \quad 0, \quad 0)$$

dont la norme est:

$$\|(A_x, \quad A_y, \quad 0, \quad 0)\| = A_{\perp}^2 \quad (17)$$

La quatrième composante est alors:

$$A_x' = \gamma(A_x + \beta 0) \quad A_y' = A_y \quad V' = \gamma(0 + \beta A_x)$$

Le 4-vecteur s'écrit dans Oxy:

$$(A_x', \quad A_y', \quad 0, \quad V') \quad (18)$$

dont la norme est

$$\|(A_x', \quad A_y', \quad 0, \quad V')\| = A'^2 - V'^2 \quad (19)$$

Les formules de transformation des composantes du quadrivecteur s'écrivent:

$$A_x' = \gamma A_x \quad A_y' = A_y \quad 0 \quad V' = \gamma \beta A_x \quad (20)$$

On voit ainsi que la compensation (14) ne fonctionne ni dans K ni dans K'. C'est évidemment normal puisque dans le cas d'une propagation non-longitudinale de l'onde plane,  $A_x$  ( $A_x'$ ) n'est pas la composante longitudinale de l'onde. Désignons cette composante longitudinale sur la direction de propagation par  $A_{\parallel}'$  qu'il convient de calculer. Supposons que la décomposition de Helmholtz s'écrive de la même manière dans le système primé.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_{\parallel}' + \mathbf{A}_{\perp}' \quad A'^2 = A_{\parallel}'^2 + A_{\perp}'^2 \quad (21)$$

autrement dit

$$\gamma^2 A_x^2 + A_y^2 = A_{\parallel}^2 + A^2 \quad \gamma^2 A_x^2 = A_{\parallel}^2 + A_x^2$$

Et donc

$$A'_{\parallel} = \gamma\beta A_x \quad (22)$$

On voit ainsi clairement que la compensation se produit pour tout  $\theta \neq \theta' \neq 0$  car

$$V' = A'_{\parallel} = \gamma\beta A_x \quad (23)$$

En calculant la norme du 4-vecteur

$$\|(A'_x, A'_y, 0, V')\| = A'^2 - V'^2 = V'^2 - A_{\perp}^2 - A_{\parallel}^2 = A_{\perp}^2 \quad (24)$$

La décomposition de Helmholtz primée conduit donc bien à l'invariance (19 & 24) de la norme  $V'^2 - A_{\parallel}^2$  du quadrivecteur potentiel primé. *On a donc démontré que la décomposition de Helmholtz ne dépend pas de la direction de propagation* et est donc invariante (12 & 21) par la TL [Pierseaux Y.(ellipse)].

La transformation de LorenTz du quadrivecteur revient à travailler avec la condition de jauge relativiste de Lorenz, écrite selon la décomposition vectorielle de Helmholtz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{\parallel} + \frac{1}{c^2} \partial_t V = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{A}'_{\parallel} + \frac{1}{c^2} \partial_t V' = 0 \quad (25)$$

dans le premier système par annulation  $A_{\parallel} = V = 0$  mais pas dans le système image K' où  $A'_{\parallel} = V' \neq 0$ .

Nous arrivons ainsi au but car nous devons montrer que l'ellipse n'est pas en contradiction avec la transversalité au niveau des champs. On voit alors que la composante longitudinale du champ électrique

$$\mathbf{E}_{\parallel} = -\partial_t \mathbf{A}_{\parallel} - \nabla V \quad \mathbf{E}'_{\parallel} = -\partial_t \mathbf{A}'_{\parallel} - \nabla V' \quad (26)$$

s'annule dans le système primé (image) par compensation.

Quelques jours avant sa mort, dans une série de cours à l'Ecole Supérieure des Postes et des Télégraphes, Henri Poincaré, reviendra sur l'ellipse allongée et sur son adoption d'une théorie électromagnétique exprimée en termes des potentiels. En effet on peut voir sur la même page (46-47) de la publication posthume [Poincaré H. (1912)] par ses élèves-ingénieurs télégraphistes (question de synchronisation oblige!) d'une part l'ellipse (avec le rôle des composantes longitudinales [Pierseaux Y.(ellipse)]) et d'autre part la prééminence de la théorie de Riemann-Lorenz sur celle de Heaviside-Hertz (avec le rôle des composantes longitudinales [Rousseaux G. (1)]).



## Conclusions

Pourquoi Einstein est-il resté silencieux sur les potentiels ? On sait qu'il a appris principalement l'électromagnétisme en lisant Hertz. Par ailleurs, il est très probable qu'il est eu accès au cours d'A. Föppl qui traitait de la théorie de Maxwell en termes des potentiels. En effet, plusieurs commentateurs y ont trouvé l'exemple du mouvement relatif entre l'aimant et la spire qu'Einstein prit comme exemple introductif de son électrodynamique des corps en mouvement. De plus, on sait qu'Einstein lut le « Versuch » de Lorentz paru en 1895 donc il connaissait en 1905 les équations faisant intervenir les potentiels. Néanmoins, il adopta la formulation de Hertz qui exclu les potentiels.

Nous voudrions suggérer une interprétation possible issue de sa vision thermodynamique de la lumière [Pierseaux Y. (Doppler)]. En effet, comme Pauli l'a souligné, il est probable qu'il y ait eu une influence des travaux d'Einstein à propos du corps noir sur sa cinématique relativiste. Le dénombrement des modes du champ dans la cavité du corps noir fait intervenir un facteur 2 dont l'origine physique correspond à la prise en compte des deux polarisations transverses de la lumière. Einstein a-t-il été influencé par la confirmation expérimentale de la loi de Planck pour écarter la possibilité de l'existence d'une propagation longitudinale relative à une caractéristique de l'onde électromagnétique comme le potentiel vecteur ? Auquel cas, sa cinématique ne pouvait être compatible qu'avec le caractère transverse thermodynamique de la lumière. Nous retrouvons ainsi la filiation thermodynamique Planck-Einstein que l'un d'entre nous avait mis en évidence à propos de la formulation de la relativité restreinte [Pierseaux Y. (Ph.D, ULB)].

Nous avons donc montré que la cinématique relativiste de Poincaré, entièrement fondée sur une théorie purement ondulatoire de la lumière, est tout à fait compatible avec l'existence d'une propagation longitudinale au niveau des potentiels telle que décrite par la formulation de Riemann-Lorenz. Il reste à examiner la manière de quantifier le champ électromagnétique dans le cadre de cette nouvelle cinématique de l'espace-temps...

## 3 Bibliography

### References

- |                            |   |
|----------------------------|---|
| [Pierseaux Y.(ellipse)]    | "La cinématique relativiste sous-jacente à l'ellipse de Poincaré", soumis, décembre 2005. |
| [Pierseaux Y. (Ph.D, ULB)] | "La "structure fine" de la relativité restreinte", L'Harmattan, Paris, 432p., 1999.       |

- [Jackson J. & Okun L. ] "Historical roots of gauge invariance", Rev. Mod. Phys. 73, 663680 (2001)
- [Darrigol O. (1)] "Les équations de Maxwell de MacCullagh à Lorentz", Collection Belin Sup Histoire des Sciences-Physique, Belin, 2005.
- [O'Rahilly A.] "Electromagnetic Theory, A critical examination of fundamentals", Dover Publications, 1965.
- [Smirnov-Rueda R.] "On Essential Incompleteness of Hertz's Experiments on Propagation of Electromagnetic Interactions", Foundations of Physics, Vol. 35, No. 1, pp. 1-31, January 2005.
- [Fitzgerald G. F.] "On the longitudinal component of light", Philosophical Magazine, Vol. 5, Num. 42, p. 260-271, 1896 or in The scientific writings of the late George Francis Fitzgerald, Ed. J. Larmor, Dublin, Hodges, London, Figgis & Co.; Longmans, Green & Co., 1902. (Article disponible en ligne : [http : //www.hep.princeton.edu/ ~ mcdonald/examples/EM/fitzgerald\\_fm42\\_260\\_271.pdf](http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/fitzgerald_fm42_260_271.pdf))
- [Levi-Civita T.(1) ] "Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma hertziana", Nuovo Cimento, VI (4), p. 93-108, août 1897.
- [Poincaré H. ] "Electricité et Optique : cours de physique mathématique", Paris, G. Carré, (1ère édition) 1890 & (2ème édition) 1901.
- [Rousseaux G. (1)] "On the physical meaning of the gauge conditions of Classical Electromagnetism : the hydrodynamics analogue viewpoint", Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 28, Numéro 2, p. 261-270, 2003. (Article disponible en ligne : [http : //www.enscm.fr/aflb/AFLB - 282/aflb282p261.pdf](http://www.enscm.fr/aflb/AFLB-282/aflb282p261.pdf))
- [T. Levi-Civita (2)] "Sur le champ électromagnétique engendré par la translation uniforme d'une

- charge électrique parallèlement à un plan conducteur indéfini”, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Sér. 2, 4, p. 5-44, 1902.  
(Article disponible en ligne :  
[http : //archive.numdam.org/article/AFST\\_1902\\_2\\_4\\_5\\_0.pdf](http://archive.numdam.org/article/AFST_1902_2_4_5_0.pdf))
- [Darrigol O.(2)] ”Henri Poincaré’s Criticism of Fin de Siècle Electrodynamics”, Stud. Hist. Phil. Mod. Phys., Vol. 26, No. 1, p. 1-44, 1995.
- [Granek G. ] ”Poincaré’s Contributions to Relativistic Dynamics, Stud. Hist. Phil. Mod. Phys., Vol. 31, No. 1, p. 15-48, 2000.
- [Lorentz H.A. ] ”Contributions to the theory of electrons”, Proc. Roy. Acad. Amsterdam, p. 608-628, 1903.  
(Article disponible en ligne :  
[http : //www.hep.princeton.edu/ ~ mcdonald/examples/EM/lorentz\\_praa\\_5\\_608\\_08.pdf](http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/lorentz_praa_5_608_08.pdf))
- [Le Bellac M. & Lévy-Leblond J.M.] ”Galilean Electromagnetism”, Il Nuovo Cimento, Vol. 14B, N. 2, 11 Aprile, p. 217-233, 1973.
- [Rousseaux G. (2)] ”Lorenz or Coulomb in Galilean Electromagnetism ?”, EuroPhysics Letters, 71 (1), p. 15-20, 2005.  
(Article disponible en ligne :  
[http : //fr.arxiv.org/abs/physics/0502129](http://fr.arxiv.org/abs/physics/0502129))
- [De Montigny M. & Rousseaux G.] ”On the electrodynamics of moving bodies at low velocities”, soumis en décembre 2005. (Article disponible en ligne :  
[http : //fr.arxiv.org/abs/physics/0512200](http://fr.arxiv.org/abs/physics/0512200))
- [Poincaré H. (1905)] ”Sur la dynamique de l’électron”, CR de l’Ac. des Sci. de Palerme, 27 juillet 1905. In Rendiconti d. Circ. mat. de Palermo, 21, Poincaré H. (1905)
- [Poincaré H. (1912)] ”La dynamique de l’électron”, supplément aux annales des postes, télégraphes et téléphones (mars 1913), A. Dumas, Editeur, rue de la Chaussée d’Antin, 6, Paris.

- [Pierseaux Y.] "Special Relativity: Einstein's spherical waves versus Poincaré's ellipsoidal waves", Annales de la fondation de Broglie, décembre 2005.
- [Einstein A.1905] "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", Ann. d. Ph., 17, p892-921, 1905, (we use English translation in "The Principle of relativity", introduction and comment by Sommerfeld, Dover, New York, p37-65, 1952).
- [Poincaré H. (1908)] "La dynamique de l'électron". R. Gén. des Sciences Pures et Appl., 19, 386-402, 1908.
- [Pierseaux Y. (Doppler)] "La cinématique relativiste avec photons d'Einstein et la cinématique relativiste avec ondes électromagnétiques de Poincaré", les Nouvelles d'Archimède, USTL, Octobre, Novembre, Décembre 2005.